几何光学与费马原理

※§1 光学基础与光子学

1.1 光的基本性质

"波长单位换算" $1nm=10^{-9}m=1\text{Å}$

"可见光范围" $\lambda\approx 400\sim 700nm$

"光速" $c=3\times 10^{8}m/s$

"基本关系式" $\nu=\frac{c}{\lambda}$，$c=\nu\lambda$

1.2 光压与动量

对于光子，能量与动量的关系为 $E=pc$

"完全吸收" $p=\frac{U}{c}$ （动量变化）

"完全反射" $p=\frac{2U}{c}$ 单个光子动量大小

⇒ 符号体系中：U表示能量，V表示电压，电位，电势差，电势，A有时表示面积（GPT很爱用）

"光压公式" $\frac{\Delta "P"}{\Delta t}=f=p\cdot \dot{N}=\frac{E/c}{\Delta t}=\frac{E/\Delta t}{c}=\frac{U}{c}$ ⇒ $P_{rad}=\frac{F}{A}=\frac{I}{c}$（完吸）$=\frac{2I}{c}$（完反）

注：N为单位时间内打到物体上的光子数，ydd老师简化为 $p\cdot 1$

这里的U表示光束功率，单位 J/s

"Δp"为 Δt 内传递给物体的总动量

f 为物体受到的力

§2 几何光学基础

2.1 基本定律

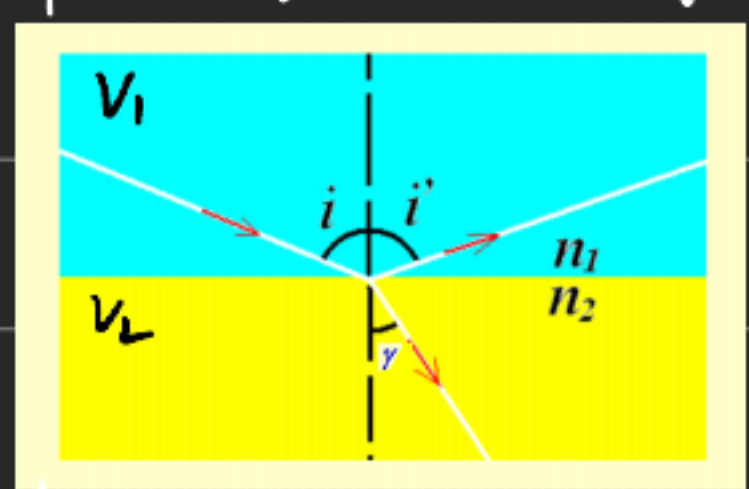
(1) "直线传播定律" 光在均匀介质中沿直线传播

(2) "反射定律" $i'=i$

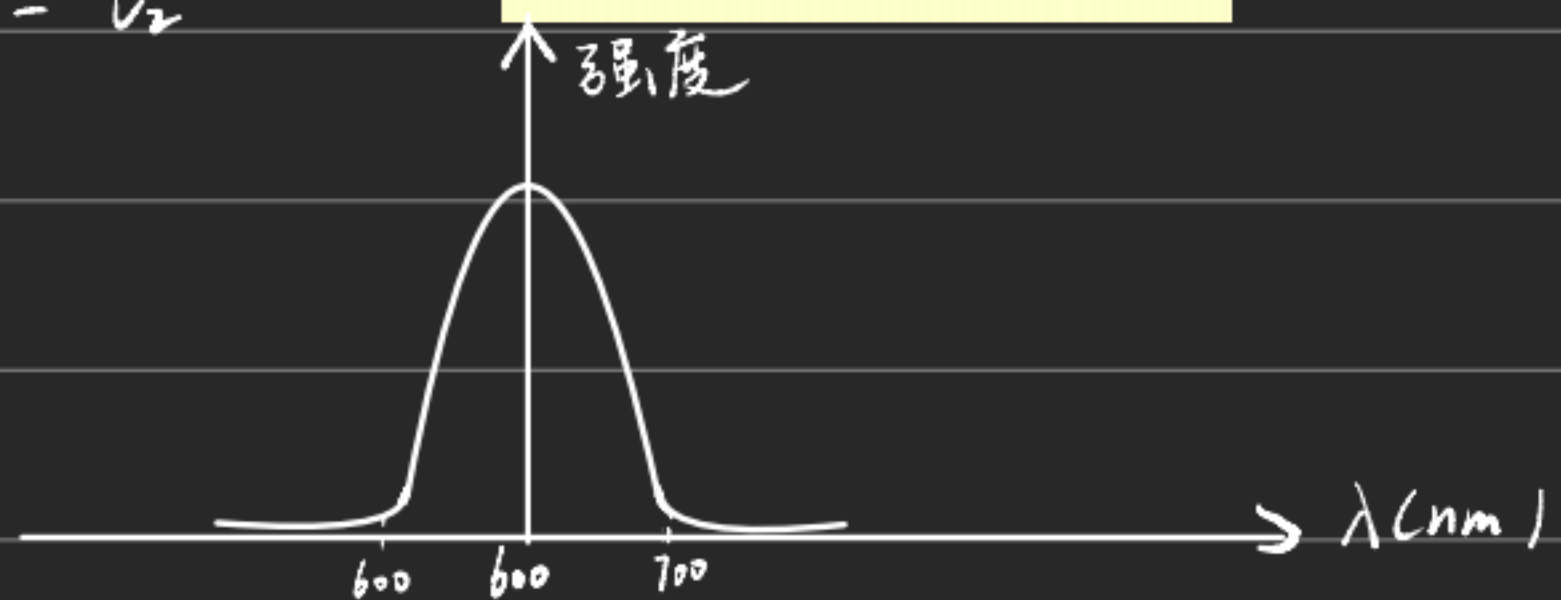
(3) "折射定律" $n_1\sin i=n_2\sin\gamma$

或写作 $\frac{\sin i}{\sin\gamma}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}=\frac{v_1}{v_2}$

其中 $n=\frac{c}{v}$



补：可见光光谱示意图



不太准确，大致如此

"独立传播定律"

光在传播过程中与其他光束相遇时，各光束都各自独立传播

其传播方向不改变。

"光路可逆性原理"

光沿反方向传播时，必定沿原光路返回。即在几何光学中，任意光路可逆

注：几何光学定律成立条件

(1) 必须是均匀介质，即同一介质的折射率处处相等，折射率不是位置的函数

(2) 必须是各向同性的介质 ⇒ 各方向折射率相等，折射率不是方向的函数

(3) 光强不能太强，否则巨大光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况

(4) 光学元件的线度应远大于光的波长，否则不可把光束简化为光线。

§3 费马原理与变分法

3.1 费马原理 (1650)

光沿着光程为极值 (通常是极小值，但也可能是极大值 or 常量)

$L=\int_A^B n\,dr$，$\delta L=0$　光程的定义为 nr ⇒ 光在介质 n 中传播的距离 r 折算成真空中的 nr 路程

注：费马原理也可用电磁理论加以证明，δL 为光程的一阶变化量 (类似于一阶导)

这也涉及到变分法证明，寻找函数 $y(x)$ 使泛函数 $J(y)$ 取极值

$J[Y(x)]=\int_A^B L(x,y,y')\,dx$

欧拉-拉格朗日方程的简略形式隐含其中 (板书)：$\frac{\delta J}{\delta Y}=0$　(我感觉这考了ydd神马)

注：费马原理可推出三大基本定律

● 直线传播定律：

在均匀介质中折射率为常数

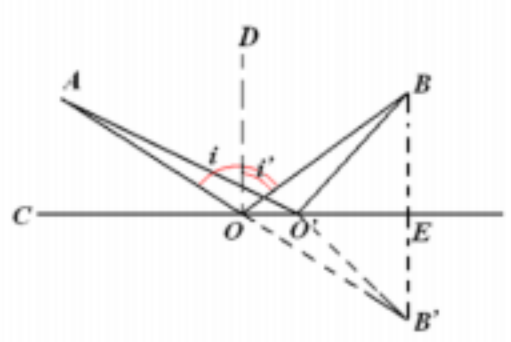
$\therefore \int_A^B n\,dr = n\int_A^B dr$

而由公理：两点间直线距离最短

$\therefore \int_A^B dr$ 的极小值为直线 AB

所以光在均匀介质中沿直线传播

● 反射定律：



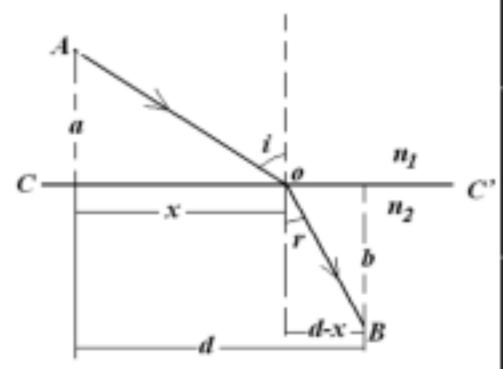
$i=i'$

● 折射定律：

$\ell = n_1\sqrt{a^2+x^2}+n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}$

$\frac{d\ell}{dx}=\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{n_2(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}=0$

$\Rightarrow n_1\sin i = n_2 \sin\gamma$



* 斯涅尔定律 (折射定律) 推导

见上图 (考了神了!)

§5 全反射

当光从光密介质 n_1 进入光疏介质 n_2，入射角 $\theta >$ 临界界 θ_c 时，可能发生全反射。

"临界角" 当折射角 $\theta_2 = 90^\circ$ 时的入射角。

$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin 90^\circ \Rightarrow \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

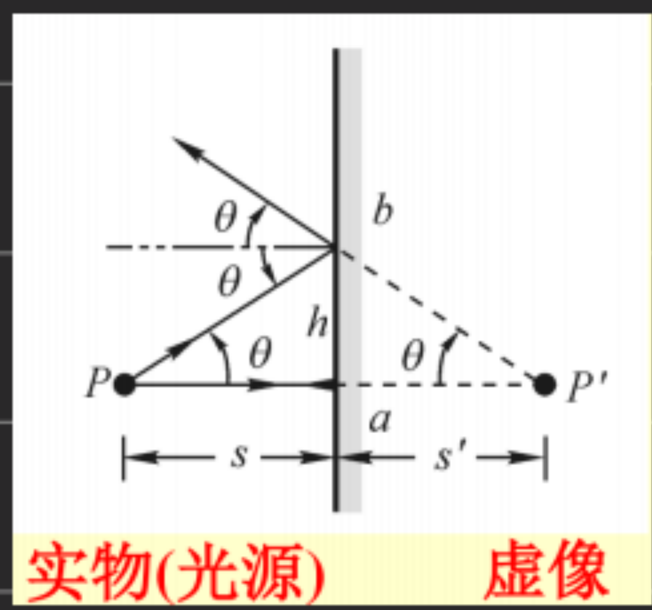
"应用"：光纤通信，海市蜃楼(Mirage)，光纤束成像。

海市蜃楼成因是地面附近空气温度高，密度小，折射率小，高空折射率大，光线连续折射直至全反射

§6 光学成像

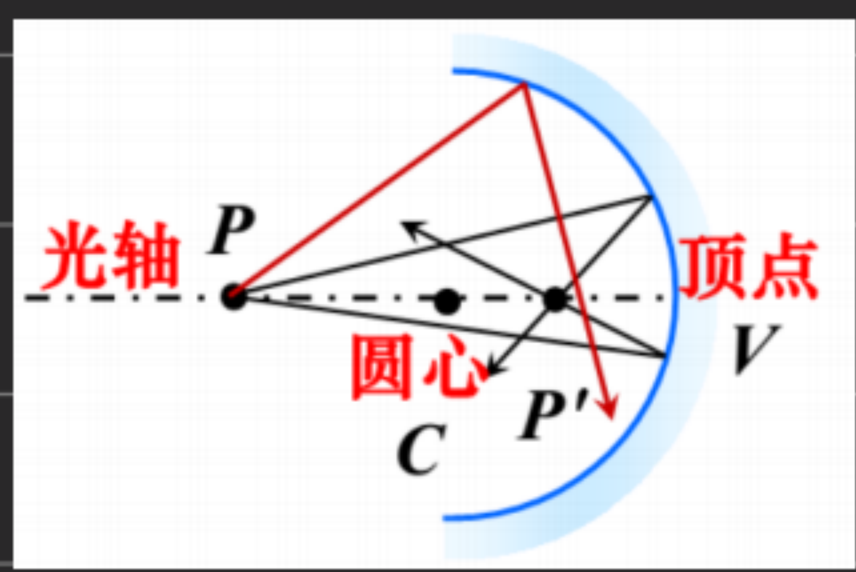
6.1 反射成像

"平面镜反射成像"



p'是实物(光源)的像 $s = -s'$

"球面镜反射成像"



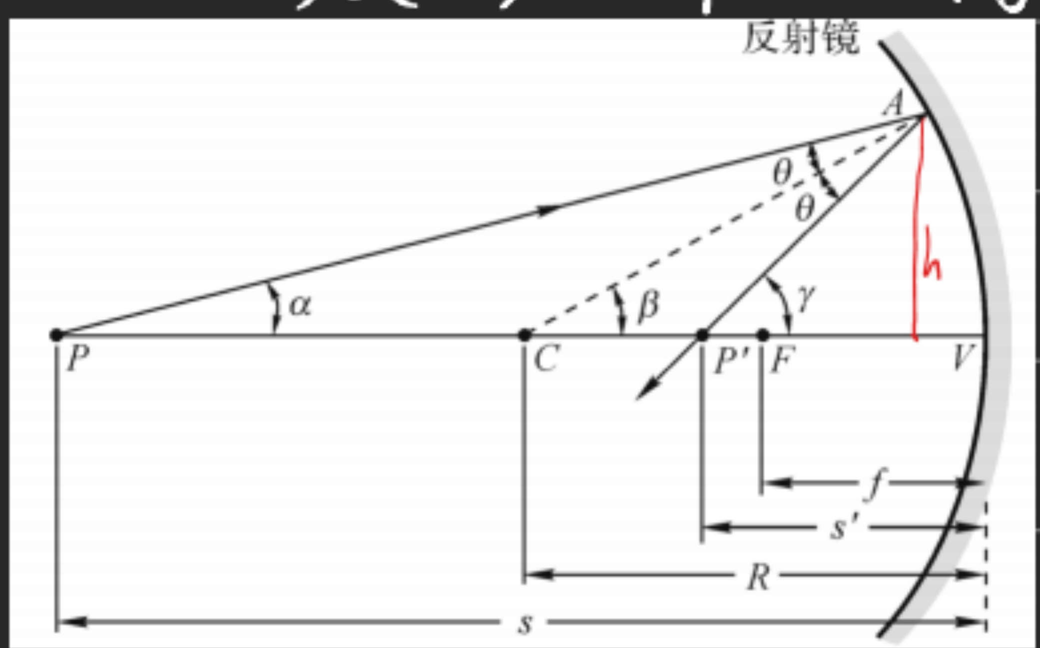
光轴：球面顶点与曲率中心的连线

像p：近轴光线的形成

*球面像差：非近轴光线引起

$\alpha + \theta = \beta$，$\gamma = \theta + \beta$

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 2\beta$ 而对于近轴光线有 $\frac{h}{s} + \frac{h}{s'} = 2 \cdot \frac{h}{R}$



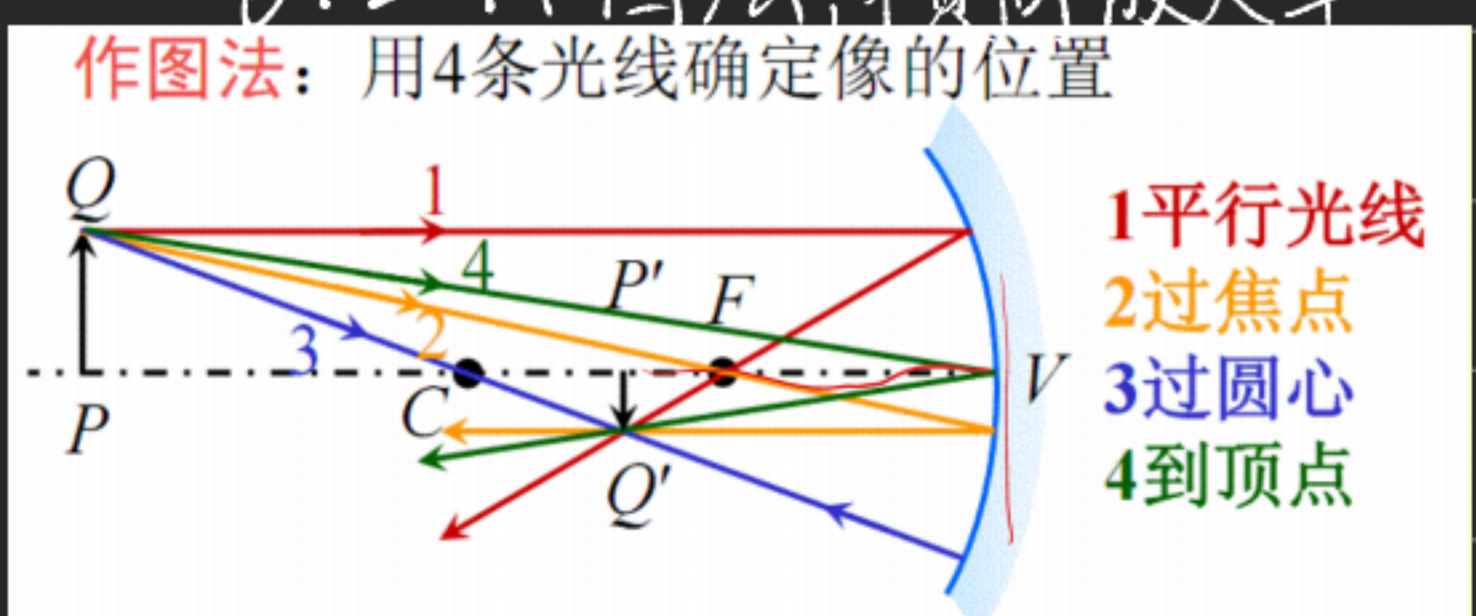
对于凹球面镜有

焦点F，焦距f：$s \to \infty$，$s' = f = \frac{R}{2}$

$s = f = \frac{R}{2}$，$s' \to \infty$　　$f = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ (球面镜镜像公式，皆成立

*6.2 作图法，横向放大率



像的性质：①实or虚

②正or倒立

③放大or缩小 $m = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

6.3 符号法则

注：虚物一般出现在多光具组的成像过程中：前一个光学元件本应成的像（未实际形成），被后一个光学元件拦截，这个未实际形成的像就成为后一个光学元件的虚物（实物是光线实际发散的起点，虚物则是光线的会聚交点被光具提前拦截形成的）。

"物距"：物与入射光线在界面同侧，s为正，实物；反之，s为负，虚物。

"像距"：像与出射光线在界面同侧，s'为正，实像；反之，s'为负，虚像

"R, f"：曲率中心C与出射光线在界面同侧，R、f为正（如：凹球面镜），反之为负（凸）

"垂直光轴横向线段"：光轴上方为正，光轴下方为负

例题：**例1：一凸球面镜反射成像，半径40cm。如果物距为(1)60cm；(2)30cm；(3)5cm，试求：像距 S' 及横向放大率m；像是实像还是虚像？正的还是倒的？放大还是缩小？**

(1) $s=60cm$，$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{60}+\frac{1}{s'}=-\frac{1}{20}$　$f=\frac{R}{2}=\frac{-40}{2}=-20$

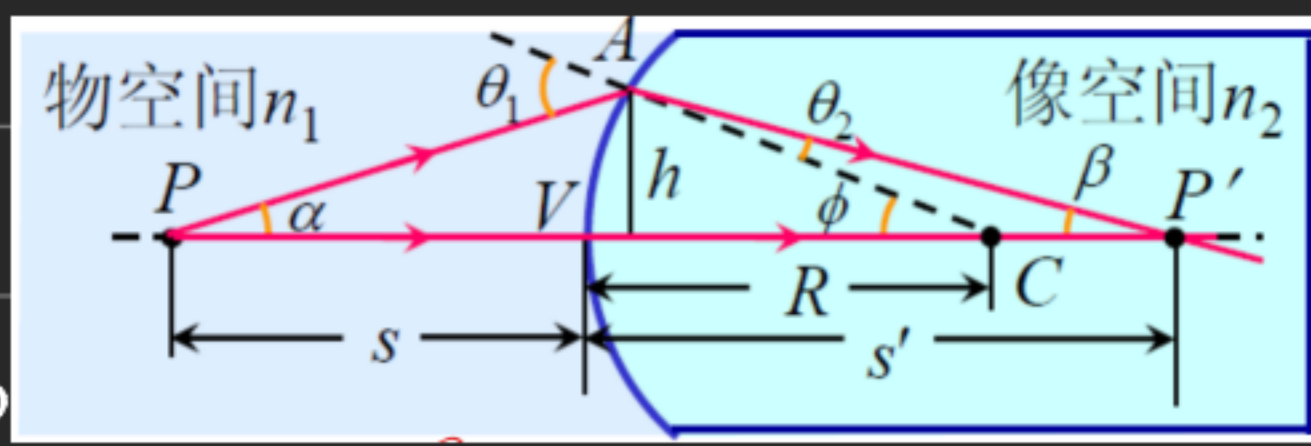
$\Rightarrow s'=-15cm$　$m=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}=+$　正立的　缩小的　虚像

下略

6.4 单球面折射成像

单个球面把介质n_1与n_2分开（光从n_1入射到n_2），近轴条件下满足下式

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R}$$



做题三步法：① $\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R}-\frac{n_1}{s}$（变形）

② 确定符号+大小关系（如右图时，$s>0$, $R>0$

令 $n_2>n_1$

③ 若 $\frac{n_2}{s'}>0 \Rightarrow \frac{n_2-n_1}{R}>\frac{n_1}{s}$　反之 $\frac{n_2-n_1}{R}<\frac{n_1}{s}$

特别的当 $\frac{n_2-n_1}{R}=\frac{n_1}{s}$，$s'\to\infty$　也记 $s=f$ 时，$s'\to\infty$

此时 $s>f \Rightarrow \frac{n_2-n_1}{R}>\frac{n_1}{s} \Rightarrow s'>0 \Rightarrow$ 实像 $\Rightarrow$ 此图情况

$0<s<f \Rightarrow \frac{n_2-n_1}{R}<\frac{n_1}{s} \Rightarrow s'<0 \Rightarrow$ 虚像

$s=f \Rightarrow s'\to\infty$（平行出射）

6.5 薄透镜成像（以下内容来自savia学长）

"薄透镜"

薄透镜：由两个彼此紧靠的球形折射面组成，厚度可以忽略，位置为o

双凸薄透镜 = **会聚透镜** = **正透镜**　焦距f为正　　双凹薄透镜 = **发散透镜** = **负透镜**　焦距f为负

主光轴：两球面曲率中心的连线

"透镜成像三条公式"

薄透镜方程：$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$

规定：汇聚时（凸）$f>0$，反之$f<0$

横向放大率 $m=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$，$m>0$时像正立，$m<0$时像倒立

$|m|>1$ 放大，$|m|<1$ 缩小

总：$\begin{matrix} f>0 \\ s>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ① \ s>f, \ s'>0, \ m<0 \\ ② \ s=f, \ s' \to \infty \\ ③ \ 0<s<f, \ s'<0, \ m>0 \end{cases}$ $\begin{matrix} f<0 \\ s>0 \end{matrix} \Rightarrow m>0, \ |m|<1, \ s'<0$

磨镜者公式

$$\boxed{\frac{1}{f}=(n-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})}$$

- n：透镜介质折射率
- R_1&R_2：透镜球面的曲率半径

· **任意选择一侧作为入射光侧，更靠近该侧的球面为 R_1，更远的球面为 R_2**
若球面向这一侧凸，则 R 取正值；若球面向这一侧凹，则 R 取负值

例 1 平凸透镜置于空气中，透镜玻璃折射率为 n，球面曲率半径绝对值为 R，则透镜焦距 $f=$______

取平面侧为入射侧

则 $R_1=\infty$，$R_2=-R \Rightarrow \frac{1}{f}=(n-1)(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{-R}) \Rightarrow f=\frac{R}{n-1}$

例 2 一发散透镜焦距为 15cm，距透镜 30cm 处放置一高 12cm 的物体，则像距为________cm，横向放大率为________。

$f=-15cm$，$s=30cm$，$y=12cm$ $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \Rightarrow s'=-10cm$

$m=-\frac{s'}{s}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

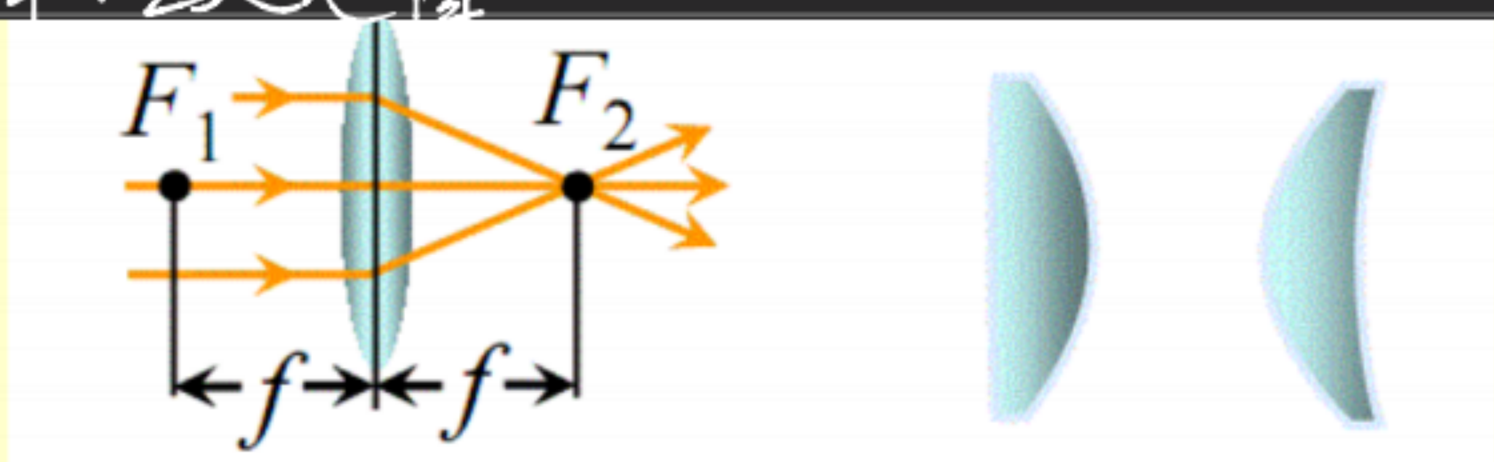
感觉此笔记违背王哥初心：

"几何光学根本不需要记任何公式，只需要理解，接下来的一切都是顺理成章的，如果通过背公式做题，那你就没有学会几何光学。"

下附几页PPT 可选择性观看

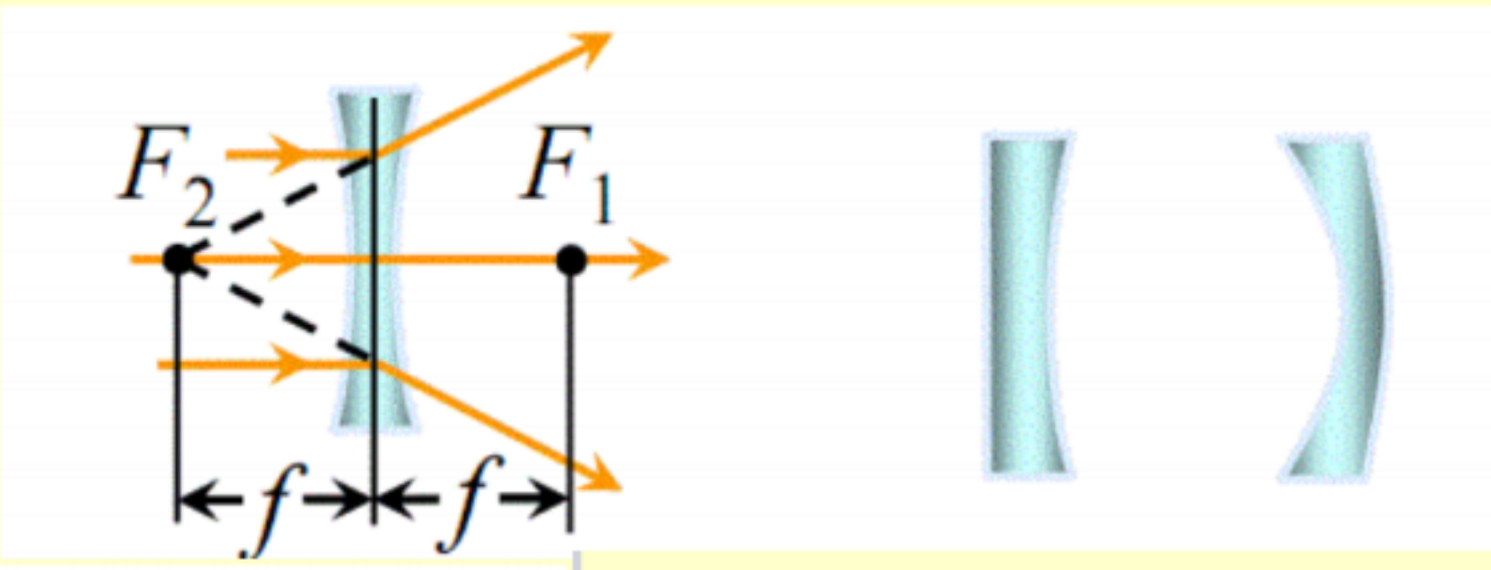
凸透镜：

正透镜，会聚透镜，
***f* 取正值**



凹透镜：

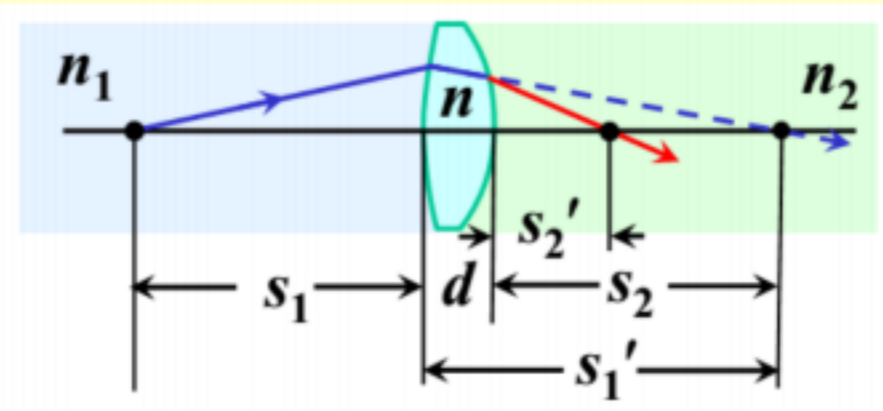
负透镜，发散透镜，
***f* 取负值**



三、薄透镜

2.薄透镜成像

(逐步成像法)



单球面折射成像:

$$\frac{n_1}{s_1}+\frac{n}{s_1'}=\frac{n-n_1}{R_1} \qquad \frac{n}{s_2}+\frac{n_2}{s_2'}=\frac{n_2-n}{R_2}$$

第一次的像是第二次的物

设：$s_2=-s_1'$，$n_1=n_2=1$，$s_1=s$，$s_2'=s'$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$$

例-习题19.2：一会聚薄透镜两球面的曲率半径相同，其绝对值为10cm，透镜玻璃的折射率为1.52。求该透镜的焦距。如果该透镜为发散透镜，则焦距又是多少？

解：

$$\frac{1}{f}=(n-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$$

因为会聚薄透镜两球面的曲率半径相同，且第二个球面的曲率中心与出射光分处界面两侧，故有

$$R_1=10cm, R_2=-10cm \qquad \Rightarrow f=\frac{R}{2(n-1)}=9.6\,\text{cm}$$

如果该透镜为发散透镜，则是第一个球面的曲率中心

焦距f $s=f_1, s'=\infty; s=\infty, s'=f_2$

与出射光分处界面两侧，故有

$$R_1=-10cm, R_2=10cm \quad \Rightarrow f=\frac{R}{2(1-n)}=-9.6\,\text{cm}$$

例2： 一正透镜，焦距f =20cm，如果物距S为(1)40cm；(2)20cm；(3)10cm，试求：像距S'及横向放大率m；像是实像还是虚像？正的还是倒的？

解： (1) $S=40cm$时：$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{f}$ $\quad \frac{1}{40}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{20}$

$\therefore S'=40cm \quad m=\frac{y'}{y}=-\frac{S'}{S}=-1$ 像是倒立的实像

(2) $S=20cm$时：$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{f}$ $\quad \frac{1}{20}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{20}$

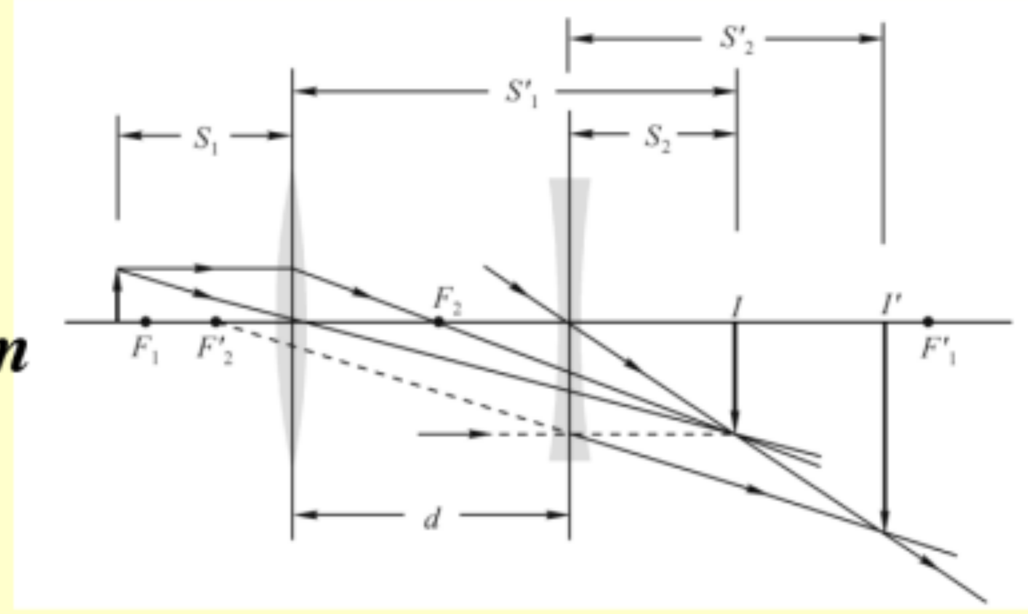
$\therefore S'=\infty \quad m=\frac{y'}{y}=-\frac{S'}{S}=\infty$ 成像于无穷远

(3) $S=10cm$时：$\frac{1}{10}+\frac{1}{S'}=\frac{1}{20}$

$\therefore S'=-20cm \quad m=\frac{y'}{y}=-\frac{S'}{S}=2$ 像是正立的放大的虚像

例19.2： 两个薄透镜同轴放置，相距d =26cm。置于左侧的凸透镜焦距f_1=12.6cm，置于右侧的凹透镜的焦距f_2= -34cm。现有物体位于凸透镜左侧18cm处，求该光学系统最后所形成的像的位置。

解： (逐步成像法)



第一次成像：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_1'}=\frac{1}{f_1}$

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{S_1'}=\frac{1}{12.6} \quad \Rightarrow S_1'=42cm$$

（折射光与像在折射面同侧，为倒立的实像）

第二次成像：（入射光与物在折射面异侧，为虚物，S_2为负）

$$S_2=-(42-26)=-16cm \qquad f_2=-34cm$$

$$\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2'}=\frac{1}{f_2} \qquad 即 \ \frac{1}{-16}+\frac{1}{S_2'}=\frac{1}{-34}$$

最后成像的位置在凹透镜右侧30.2cm处，为倒立的实像

$\therefore \ S_2'=30.2cm$（像与出射光同侧，为“正立”的实像）