

工程力学-材料力学部分 (Mechanics of Materials)

期末冲刺”补天”讲义：全模块算法化导引（含符号释义与对比速记）

WalkindadHH

January 11, 2026

第 0 部分 Contents

1	考纲重点速记：一页背诵清单（先背它!）	3
2	第 5 章：材料力学基础	4
2.1	基本假设与研究对象	4
2.2	应力、应变、胡克定律	4
3	第 6 章：轴向拉伸与压缩	5
3.1	核心公式体系（带符号释义）	5
3.2	强度条件	6
3.3	算法化解题：超静定拉压结构	6
3.4	应力集中（6.7）（了解即可：不考/低频）	7
4	第 7 章：圆轴扭转	7
4.1	核心公式体系（带符号释义）	7
4.2	扭矩图	8
4.3	算法化解题：轴的强度与刚度设计	8
5	第 8 章：梁的弯曲内力	8
5.1	核心关系（带符号释义）	9
5.2	算法化解题：剪力图与弯矩图	9
6	第 9 章：弯曲应力与强度	10
6.1	弯曲正应力（最核心）	10
6.2	对称弯曲剪应力	11
7	第 10 章：梁的挠度与刚度（全书最重点）	11
7.1	挠曲线微分方程（挠度题的”母公式”）	11
7.2	积分法（考试最稳的通用解法）	12
7.3	叠加法（把复杂梁拆成”标准件”）	12
7.4	简单静不定梁	13
8	第 11 章：应力状态分析	14
8.1	平面应力状态：斜截面应力公式	14
8.2	主应力与最大剪应力	15
8.3	广义胡克定律	15
9	第 12 章：复杂应力状态强度问题	16
9.1	强度理论	16
9.2	薄壁容器（了解即可：不考/低频）	17

10	第 13 章：压杆稳定	17
10.1	核心公式体系（带符号释义）	18
11	最后一页：考前”做题顺序建议”（防崩）	19

第 1 部分 考纲重点速记：一页背诵清单（先背它！）

★ 重点记忆：模块化必背公式清单（建议考前默写一遍）

模块	必背公式（能直接秒题）
拉压	★ 重点记忆： $\sigma = \frac{F_N}{A}, \varepsilon = \frac{\Delta l}{L}, \Delta l = \frac{F_N L}{EA}$ ；温度： $\Delta l_T = \alpha \Delta T L$ （超静定必用）
扭转	★ 重点记忆： $\tau(\rho) = \frac{T\rho}{I_p}, \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}, \varphi = \frac{TL}{GI_p}$ ；圆： $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
梁内力图	★ 重点记忆： $\frac{dV}{dx} = -q(x), \frac{dM}{dx} = V(x)$ ；★ 重点记忆： $\Delta M = \int V dx$ （剪力图面积 = 弯矩增量）
弯曲应力	★ 重点记忆： $\sigma = \frac{My}{I_z}, \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$ ；矩形： $I_z = \frac{bh^3}{12}, W_z = \frac{bh^2}{6}$
弯曲变形	★ 重点记忆： $EI w''(x) = M(x)$ ；边界 + 连续性（分段积分题的命根子）
平面应力	★ 重点记忆： $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ；★ 重点记忆： $\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$
强度理论	★ 重点记忆：第三： $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$ ；★ 重点记忆：第四： $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$
压杆稳定	★ 重点记忆： $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}, \lambda = \frac{\mu L}{i}, i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ；取最小 I （最弱轴）

常用符号总表（通用，看到就能秒认）

F_N / N	轴力（拉为正，压为负）。
A	截面积。
E	弹性模量； G ：剪切模量（一般 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ）。
L	杆/轴/梁长度； Δl ：轴向伸长（压缩为负）。
T	扭矩； φ ：扭转角（弧度制）； ρ ：距圆心半径。
I_z	关于中性轴的截面惯性矩； I_p ：极惯性矩（圆： $I_p = 2I_z$ ）。
W_z	抗弯截面系数； W_p ：抗扭截面系数。
V	剪力； M ：弯矩； $q(x)$ ：分布载荷强度。
$w(x)$	挠度； $\theta = w'$ ：转角； w'' ：曲率相关量。

μ 泊松比； 压杆稳定里 μ 也常表示长度系数（本讲义中稳定部分用“长度系数 μ ” 的含义）。

α （热学）线膨胀系数； （应力分析）主平面方向角的半角参数（见 $\tan 2\alpha$ ）。

$\sigma_{\text{allow}} / [\sigma]$
许用应力（由材料强度/安全系数确定）。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：单位与数量级： E 常用 GPa， 应力常用 MPa； 几何量用 mm 时， M 要换 $\text{N} \cdot \text{mm}$ 。
- ★ 重点记忆：正负号：先约定再计算（扭矩、剪力/弯矩、主应力排序）。
- ★ 重点记忆：圆截面三件套： $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ ， $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 2I_z$ ， $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ ， $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ 。

第 2 部分 第 5 章：材料力学基础

2.1 基本假设与研究对象

★ 重点记忆：材料力学三大”默认前提”（写题前先默念）

1. 连续性假设：材料内部无空隙，密实连续。
2. 均匀性假设：各处力学性质相同。
3. 各向同性假设：各方向力学性质相同。
4. 小变形假设：变形后几何关系近似不变（允许用线性几何）。
5. 线弹性假设：应力与应变满足胡克定律（不进入塑性）。
6. 平截面假设（弯曲）：梁弯曲后横截面仍保持平面。

2.2 应力、应变、胡克定律

★ 重点记忆：一维胡克定律（拉压基础）

- 正应力： $\sigma = \frac{F}{A}$
- 正应变： $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
- 胡克定律： $\sigma = E\varepsilon$

符号说明：

- σ 正应力（拉正压负）。
- F 轴向内力（轴力）。
- A 截面积（ m^2 或 mm^2 ）。

ε 正应变（无量纲）。
 Δl 轴向伸长（压缩为负）。
 l / L 原长。
 E 弹性模量（Pa/MPa/GPa）。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：单位检查：常把“单位检查”当隐形扣分点： $\text{N}/\text{mm}^2 = \text{MPa}$ 。
- 量纲分析： $[\sigma] = \text{Pa}$ ， $[\varepsilon]$ 无量纲， $[E] = \text{Pa}$ 。

第 3 部分 第 6 章：轴向拉伸与压缩

3.1 核心公式体系（带符号释义）

★ 重点记忆：拉压全家桶（先写名义应力，再写变形）

1. 横截面正应力：★ 重点记忆： $\sigma = \frac{F_N}{A}$
2. 应变与胡克定律：★ 重点记忆： $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$ ， $\sigma = E\varepsilon$
3. 轴向变形：★ 重点记忆： $\Delta l = \frac{F_N L}{EA}$ （均匀杆）
4. 变截面/变内力： $\Delta l = \int \frac{F_N(x)}{EA(x)} dx$
5. 温度变形（超静定必用）：★ 重点记忆： $\Delta l_T = \alpha \Delta T L$

符号说明：

σ 正应力（拉正压负）。
 F_N / N 轴向内力（轴力）。
 A 截面积。
 ε 正应变。
 Δl 轴向伸长（压缩为负）。
 L 杆长。
 E 弹性模量。
 α 线膨胀系数； ΔT ：温差（升温为正）。

辅助记忆：拉压”位移—刚度”写法（做超静定特别顺手）

$$\Delta l = \frac{F_N}{k}, \quad k = \frac{EA}{L}$$

符号说明：

k 轴向刚度（越大越不变形）。

其余 同上。

3.2 强度条件

★ 重点记忆：拉压强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|F_N|_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

三类强度问题：

- 校核强度：已知 $F_N, A, [\sigma]$ ，验证 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 。
- 设计截面：已知 $F_N, [\sigma]$ ，求 $A \geq F_N/[\sigma]$ 。
- 确定许可载荷：已知 $A, [\sigma]$ ，求 $F_N \leq A[\sigma]$ 。

3.3 算法化解题：超静定拉压结构

【解题算法：超静定拉压结构”三步法”（平衡 + 协调 + 代换）】

1. 静力平衡：画受力图，列平衡方程（ $\sum F = 0, \sum M = 0$ ）。
2. 变形协调：画变形图，建立几何关系（刚性杆转动/位移、相似三角形、位移兼容）。
3. 物理代换： $\Delta l_i = \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$ （必要时加 Δl_{T_i} ），代回求解。

【解题算法：一次静不定”标配套路”（解除约束法）】

1. 选冗余力 X （比如某支座反力/某段内力）。
2. 解除约束 \Rightarrow 得到基本体系，求 Δl_X 。
3. 写兼容条件：被解除处的位移为 0（或给定值）。
4. 解 X ，再回代求各段 $N, \sigma, \Delta l$ 。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：挤压面积：圆柱销钉挤压面积取投影 $A_{jy} = d \cdot t$ ，不是弧面积。
- ★ 重点记忆：串联/并联直觉：串联”变形相加”；并联”力分配”（本质都回到 $\Delta l = \frac{FL}{EA}$ ）。
- ★ 重点记忆：温度应力：超静定结构有温度变化时，必须考虑 $\Delta l_T = \alpha \Delta T L$ 。

3.4 应力集中 (6.7) (了解即可: 不考/低频)

了解三句话: 什么是应力集中、怎么估、怎么防

1. 概念: 几何突变(孔、缺口、台阶、尖角)使局部应力显著大于名义应力。
2. 工程估算: ★ 重点记忆: $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$
3. 设计处理: 增大圆角半径、避免尖角、过渡圆滑、局部加厚/加筋、开卸荷槽等。

符号说明:

σ_{\max} 最大局部应力(危险点)。

σ_{nom} 名义应力(按简单公式 F/A 或 M/W 算出的平均/线性外推值)。

K_t 理论应力集中系数(由缺口形状与尺寸比查图/查表得到)。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆: 考试常见”口头问法”: 为什么孔边容易裂? ——因为 $K_t > 1$ 导致局部应力峰值。
- 若题目给疲劳信息: 常用 K_f (疲劳应力集中系数) 而不是 K_t , 但你们若不考疲劳可不展开。

第 4 部分 第 7 章: 圆轴扭转

4.1 核心公式体系(带符号释义)

★ 重点记忆: 扭转全家桶(应力分布 + 扭转角)

- 剪应力分布: ★ 重点记忆: $\tau(\rho) = \frac{T\rho}{I_p}$
- 最大切应力: ★ 重点记忆: $\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$
- 扭转角(均匀圆轴): ★ 重点记忆: $\varphi = \frac{TL}{GI_p}$
- 圆截面: $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ (实心), $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ (实心)

符号说明:

τ 切应力; τ_{\max} : 外缘最大切应力。

T 扭矩。

ρ 到圆心的距离(外缘 $\rho = d/2$)。

I_p 极惯性矩。

W_p 抗扭截面系数。

φ 扭转角（弧度）； L ：轴段长度。
 G 剪切模量。

★ 重点记忆：对比速记：拉压位移 Δl 与扭转角 φ 的“同构”

$$\Delta l = \frac{F_N L}{EA} \quad \varphi = \frac{TL}{GI_p}$$

$$k_{\text{拉压}} = \frac{EA}{L} \quad k_{\text{扭转}} = \frac{GI_p}{L}$$

记忆映射： $F_N \leftrightarrow T$, $EA \leftrightarrow GI_p$, $\Delta l \leftrightarrow \varphi$ 。

符号说明：同前两节（这里的“刚度” k 均指对应载荷下的位移/转角刚度）。

4.2 扭矩图

【解题算法：扭矩图 3 步】

1. 分段截取：写平衡 $\sum M = 0$ 得 $T(x)$ 。
2. 规定正负：先定“观察端 + 右手法则”为正（或按课堂约定）。
3. 画 T 图：分段常值/线性，跳跃点来自集中力矩。

4.3 算法化解题：轴的强度与刚度设计

【解题算法：等直圆轴设计流程（强度 + 刚度双约束）】

1. 画扭矩图：确定危险截面上的最大扭矩 T_{\max} 。
2. 强度设计： $\tau_{\max} = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} \leq [\tau] \Rightarrow d_1$ 。
3. 刚度设计： $\varphi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i I_{p,i}} \leq [\varphi] \Rightarrow d_2$ 。
4. 取大： $d = \max(d_1, d_2)$ 并按标准尺寸向上取整。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：分段圆轴：扭转角分段累加： $\varphi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i I_{p,i}}$ 。
- ★ 重点记忆：扭矩正负号：先定“观察端 + 右手法则”，扭矩图才不会画反。
- ★ 重点记忆：空心轴： $I_p = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32}$, $W_p = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{16d_2}$ 。

第 5 部分 第 8 章：梁的弯曲内力

5.1 核心关系（带符号释义）

★ 重点记忆：内力与载荷的微分关系（背熟 = 会画图）

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$

符号说明：

x 沿梁轴线坐标。

$q(x)$ 分布载荷强度（向下取正/取负按课堂约定；关键是统一）。

$V(x)$ 剪力。

$M(x)$ 弯矩。

ΔM 弯矩在区间内的变化量（等于剪力图面积）。

★ 重点记忆：重要推论

- 无分布载荷区段： $V = \text{常数}$ ， $M = \text{线性函数}$ 。
- 均布载荷区段： $V = \text{线性函数}$ ， $M = \text{二次函数（抛物线）}$ 。
- 剪力为零处： $V = 0 \Rightarrow M$ 取极值（最大或最小）。
- 集中力作用点： V 发生跳跃， M 有折角。
- 集中力偶作用点： V 不变， M 跳跃。

5.2 算法化解题：剪力图与弯矩图

【解题算法：快速画剪力图-弯矩图（不慌版）】

1. 先算反力：整体平衡（ $\sum F_y = 0$ ， $\sum M = 0$ ）。
2. 画剪力 V ：集中力 = 跳跃；均布 $q = \text{斜线}$ ；外加力矩不影响剪力。
3. 画弯矩 M ：由 V 面积累出来；★ 重点记忆： $V = 0$ 处是 M 极值点。
4. 边界检查：简支端通常 $M = 0$ ；自由端 $V = 0$ ， $M = 0$ （若无端部载荷/力矩）。

【例题精选：题 8.2（剪力图/弯矩图）】

题意：如图示梁，求支反力并画 V 图、 M 图。

答案要点：

$$F_A = F_B = 20\text{kN}$$

$$M(x) = \begin{cases} 20x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 15 + 5x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

（图形： V 为分段常值/线性， M 由积分关系得到分段一次函数。）

【例题精选：题 8.4（含均布载荷 q 的典型梁）】

题意：如图示梁，求支反力并画内力图。

答案要点：

$$F_A = F_B = \frac{1}{2}ql = 10\text{kN}$$
$$M(x) = \begin{cases} 10x - \frac{1}{2}qx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 10x - \frac{1}{2}qx^2 - 10(x-2), & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

第 6 部分 第 9 章：弯曲应力与强度

6.1 弯曲正应力（最核心）

★ 重点记忆：弯曲正应力公式（外缘最危险）

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

常用截面性质：

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (\text{矩形}); \quad I_z = \frac{\pi d^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad (\text{实心圆})$$

符号说明：

σ 正应力（拉正压负）。

M 弯矩（正负按约定；算 σ_{\max} 用 $|M|$ 更稳）。

y 距中性轴距离（外缘 $y = c$ ，矩形 $c = h/2$ ，圆 $c = d/2$ ）。

I_z 关于中性轴的截面惯性矩。

W_z 抗弯截面系数（ $W_z = I_z/c$ ）。

b, h, d 截面尺寸（宽、高、直径）。

★ 重点记忆：弯曲强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

三类强度问题：

- 校核强度：已知 $M, W_z, [\sigma]$ ，验证 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ 。
- 设计截面：已知 $M, [\sigma]$ ，求 $W_z \geq M/[\sigma]$ 。
- 确定许可载荷：已知 $W_z, [\sigma]$ ，求 $M \leq W_z[\sigma]$ 。

6.2 对称弯曲剪应力

★ 重点记忆：梁横截面剪应力（知道形状 + 会用最大值）

$$\tau = \frac{VQ}{I_z b}$$

V 该截面剪力。

Q 中性轴以上（或以下）部分对中性轴的一次矩（也称静矩）。

b 计算处的截面宽度（注意随高度变）。

I_z 截面惯性矩。

★ 重点记忆：常用截面剪应力最大值

矩形截面（宽 b ，高 h ）：

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3}{2}\tau_{\text{平均}}$$

圆形截面（直径 d ）：

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A} = \frac{4}{3}\tau_{\text{平均}}$$

工字形截面：剪应力主要由腹板承担，近似公式

$$\tau_{\max} \approx \frac{V}{A_{\text{腹板}}}$$

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：最常考：先由第 8 章画 $M(x)$ 找 M_{\max} ，再用 $\sigma_{\max} = M_{\max}/W_z$ 。
- ★ 重点记忆：单位陷阱：弯矩单位（ $\text{kN} \cdot \text{m}$ ）要统一到 $\text{N} \cdot \text{mm}$ 才能直接出 MPa。
- ★ 重点记忆：中性轴位置：对称截面中性轴在形心；非对称截面需计算形心位置。

第 7 部分 第 10 章：梁的挠度与刚度（全书最重点）

7.1 挠曲线微分方程（挠度题的”母公式”）

★ 重点记忆：挠度—弯矩—刚度关系（务必写清符号正负约定）

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

$$EI w''(x) = M(x)$$

符号说明：

$w(x)$ 挠度（建议统一：向下为正；只要全篇一致即可）。

$\theta(x)$ 转角（rad）。

E 弹性模量； I 或 I_z ：弯曲平面内的惯性矩。

EI 抗弯刚度。

$M(x)$ 弯矩函数。

★ 重点记忆：对比速记：三大”变形公式”一眼类比（推荐背诵）

$$\Delta l = \frac{F_N L}{EA} \quad (\text{拉压: 位移})$$

$$\varphi = \frac{TL}{GI_p} \quad (\text{扭转: 转角})$$

$$w'' = \frac{M}{EI} \quad (\text{弯曲: 曲率/二阶导})$$

看题识别：题目要”伸长”就找 Δl ；要”转角”就找 φ 或 θ ；要”挠度”就用 w 。
符号说明：同前（ EA, GI_p, EI 分别是拉压/扭转/弯曲刚度）。

7.2 积分法（考试最稳的通用解法）

【解题算法：积分法 6 步（★ 重点记忆：考场写作模板）】

1. 建坐标：选 x 轴、约定 q, V, M, w 正方向（写在草稿最上方）。
2. 求支反力：先把静力学做干净。
3. 写 $M(x)$ ：分段写或用麦考利括号（分段写就够用）。
4. 两次积分： $EIw''(x) = M(x) \Rightarrow EIw'(x) \Rightarrow EIw(x)$ ，每次积分产生一个积分常数。
5. 边界条件定常数：
 - 简支端： $w = 0$
 - 固定端： $w = 0, \theta = 0$
 - 自由端： $M = 0, V = 0$ （已用于求 $M(x)$ ）
 - 连接处： w, θ 连续
6. 求极值：最大挠度点满足 $\theta = w'(x) = 0$ （再判断在哪一段）。

7.3 叠加法（把复杂梁拆成”标准件”）

★ 重点记忆：叠加原理成立的前提（线弹性 + 小变形）

$$w = \sum_i w_i \quad \theta = \sum_i \theta_i$$

w_i, θ_i 由”单一载荷/单一边界”产生的挠度与转角分量。

★ 重点记忆：常用标准结果表（考试直接查脑子）

悬臂梁：端力 P （自由端）

$$\theta_{\text{free}} = \frac{PL^2}{2EI}, \quad w_{\text{free}} = \frac{PL^3}{3EI}$$

悬臂梁：端力偶 M_0 （自由端）

$$\theta_{\text{free}} = \frac{M_0 L}{EI}, \quad w_{\text{free}} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

悬臂梁：均布载荷 q （全长）

$$\theta_{\text{free}} = \frac{qL^3}{6EI}, \quad w_{\text{free}} = \frac{qL^4}{8EI}$$

简支梁：跨中集中力 P

$$\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}, \quad w_{\text{max}} = \frac{PL^3}{48EI}$$

简支梁：全跨均布载荷 q

$$\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}, \quad w_{\text{max}} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

（以上均在“常见符号约定”下成立： L 跨长， EI 为常数。）

7.4 简单静不定梁

【解题算法：一次静不定梁（第 10 章常考）：解除约束法】

1. 选冗余反力 X （通常选“多余支座反力”最方便）。
2. 去掉该支座（基本体系）分别求：
 - 由实际载荷导致的位移 w_0
 - 由 X 导致的位移 w_X
3. 兼容条件：原支座处 $w_0 + w_X = 0$ （或给定位移）。
4. 解 X ，再求完整的反力、内力、应力/挠度。

【例题精选：题 10.1（积分法：求 w_C, θ_B ）】

题意：试用积分法求简支梁中点截面 C 的挠度 w_C 和右端支座截面 B 处的转角 θ_B ，计算最大转角，并判断最大挠度出现在 AC 段还是 CB 段。

参考答案结论：

$$w_C = -\frac{5ql^4}{256EI}, \quad \theta_B = \frac{11ql^3}{192EI}$$

最大转角：

$$\theta_{\text{max}} = \frac{35ql^3}{768EI}$$

最大挠度位置：最大挠度在 AC 段。

【例题精选：题 10.4（叠加法：求端点 C 的 w_C, θ_C ）】

题意：用叠加法求图示梁 C 端的挠度 w_C 和转角 θ_C 。

参考答案结论：

$$w_C = -\frac{ql^4}{8EI}, \quad \theta_C = -\frac{ql^3}{6EI}$$

【例题精选：题 10.7（一次静不定：解除 B 处约束）】

题意：图示梁：A 为固定铰支座，B、C 为滑动铰支座；均布载荷 $q = 10\text{kN/m}$ ，集中力 $F = 10\text{kN}$ ，跨度 $l = 2\text{m}$ ，圆截面直径 $d = 100\text{mm}$ ，许用应力 $\sigma_{\text{allow}} = 100\text{MPa}$ 。试校核强度。

参考答案关键结果：

$$F_B = \frac{11}{16}F + \frac{5}{4}ql = 31875 \text{ N}$$

$$F_A = \frac{3}{32}F + \frac{3}{8}ql = 6562.5 \text{ N}, \quad F_C = \frac{13}{32}F + \frac{3}{8}ql = 11562.5 \text{ N}$$

危险截面弯矩：

$$M_{\text{max}} = 2.75 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

圆截面抗弯截面系数：

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 9.82 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

最大正应力：

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} = 70.03 \text{ MPa} < \sigma_{\text{allow}} = 100 \text{ MPa} \Rightarrow \text{满足强度。}$$

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：挠度题三件套：M(x) 写对 + 边界条件写全 + 极值点用 $\theta = 0$ 。
- ★ 重点记忆：常见扣分：把“简支端条件”误写成 $\theta = 0$ （错！简支端一般只约束 w ）。
- ★ 重点记忆：底线检查：边界条件（简支 $w = 0$ ，固支 $w = \theta = 0$ ）+ 连接处 w, θ 连续。

第 8 部分 第 11 章：应力状态分析

8.1 平面应力状态：斜截面应力公式

★ 重点记忆：平面应力斜截面（角度统一用 2α ）

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

σ_x, σ_y 两正交截面正应力。

τ_{xy} 剪应力（符号按你画的应力元方向约定）。

α 所求截面法线与 x 轴夹角。

σ_{α} 斜截面正应力。

τ_{α} 斜截面剪应力。

8.2 主应力与最大剪应力

★ 重点记忆：主应力（平面应力）

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (\text{主平面方向角})$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

符号说明：

σ_1, σ_2 主应力（通常取 $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ；平面应力下 $\sigma_3 = 0$ ）。

α_0 主平面法线与 x 轴夹角。

τ_{\max} 最大剪应力。

8.3 广义胡克定律

★ 重点记忆：广义胡克（主应力方向最干净）

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
主应变。

μ / ν 泊松比（材料常数）。

E 弹性模量。

【例题精选：题 11.1（斜截面应力：直接套公式）】

题意：已知物体应力状态（单位 MPa）如图所示，计算斜截面上的正应力与切应力。

参考答案结论：

$$(a) \sigma_\alpha = 72.5, \tau_\alpha = 30.3; \quad (b) \sigma_\alpha = 15, \tau_\alpha = 35; \quad (c) \sigma_\alpha = -67.7, \tau_\alpha = -14.6 \quad (\text{MPa})$$

【例题精选：题 11.4（应变片 + 广义胡克：反推主应力）】

题意：钢制平板受两个方向拉力作用，两个应变片（A、B）测得 $\varepsilon_A = -100 \times 10^{-6}$ ， $\varepsilon_B = -200 \times 10^{-6}$ ，已知 $E = 210 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.3$ ，求 x, y 方向主应力。

参考答案结论：

$$\sigma_A = -36.9 \text{ MPa}, \quad \sigma_B = -53 \text{ MPa}$$

【例题精选：题 11.5（梁截面三点应力状态）】

题意：如图，A,B,C 为简支梁截面上的三点，试画出 A,B,C 三点应力状态并画主应力体。集中力 $F = 10\text{kN}$ 。

参考答案关键结果：

截面惯性矩：

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.05 \times 0.1^3}{12} = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

点 A:

$$\sigma_A = \frac{My_A}{I_z} = 120 \text{ MPa}, \quad \tau_A = 0$$

点 B:

$$\sigma_B = 0, \quad \tau_B = 1.5 \text{ MPa}$$

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：11.2 两个公式是”题 11.1 这种题”的直接按钮。
- ★ 重点记忆：11.3 主应力是为第 12 章强度理论服务：主应力/最大剪应力先算出来。
- ★ 重点记忆：单位陷阱：单位（GPa 与 MPa）换算， μ 写成 ν 不要慌。

第 9 部分 第 12 章：复杂应力状态强度问题

9.1 强度理论

★ 重点记忆：四大强度理论：相当应力 σ_r

设主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ：

- 第一（最大拉应力）： $\sigma_{r1} = \sigma_1$
- 第二（最大拉应变）： $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$
- 第三（最大切应力，Tresca）：★ 重点记忆： $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$
- 第四（畸变能，von Mises）：★ 重点记忆： $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

强度条件： $\sigma_r \leq [\sigma]$

符号说明：

σ_r 相当应力（拿它与许用应力 $[\sigma]$ 比较）。

μ 泊松比（此处是材料常数，不是长度系数）。

$[\sigma]$ 许用应力（题目给或由材料强度/安全系数换算）。

★ 重点记忆：弯扭组合（圆轴）必考：一行写出强度条件

圆轴受弯矩 M 与扭矩 T ，外缘

$$\sigma = \frac{M}{W_z}, \quad \tau = \frac{T}{W_p}$$

$$\text{第三理论: } \sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{第四理论: } \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

符号说明:

M, T 危险截面处弯矩、扭矩 (通常取最大值)。

W_z, W_p
抗弯/抗扭截面系数。

σ, τ 外缘正应力与切应力。

★ 重点记忆: 适用范围

- 第一、第二理论: 脆性材料 (如铸铁、混凝土)。
- 第三、第四理论: 塑性材料 (如钢、铝)。
- 工程常用: 塑性材料用第三或第四; 脆性材料用第一。

9.2 薄壁容器 (了解即可: 不考/低频)

薄壁圆筒/球壳内压: 两条经典结果 (只需会认)

薄壁判据: ★ 重点记忆: $t \leq \frac{r}{10}$ (壁厚 t 远小于半径 r)

薄壁圆筒 (内压 p):

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr}{t} \quad (\text{环向/箍向, 应力最大}) \quad \sigma_z = \frac{pr}{2t} \quad (\text{轴向})$$

薄壁球壳 (内压 p):

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (\text{各向相同})$$

符号说明:

p 内压。

r 内半径 (工程上常用中径近似也行, 题目会说明)。

t 壁厚。

σ_{θ} 环向 (箍向) 正应力; σ_z : 轴向正应力。

【易错避坑/考试陷阱】

- 这块若不考: 会记环向是轴向的 2 倍 (圆筒: $\sigma_{\theta} = 2\sigma_z$) 即可。

第 10 部分 第 13 章: 压杆稳定

10.1 核心公式体系（带符号释义）

★ 重点记忆：压杆稳定三板斧

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

符号说明：

F_{cr} / P_{cr}

欧拉临界力（达到后可能失稳屈曲）。

E 弹性模量； I ：最小惯性矩（最弱弯曲轴）。

L 压杆实际长度。

μ 长度系数（端部约束影响：铰-铰 1，固-自由 2，固-固 0.5，固-铰 0.7）。

λ 细长比（柔度）； i ：回转半径； A ：截面积。

★ 重点记忆：长度系数 μ （按端部约束）

端部约束	长度系数 μ	等效长度 l_0
两端铰支	1.0	L
一端固定，一端自由	2.0	$2L$
两端固定	0.5	$0.5L$
一端固定，一端铰支	0.7	$0.7L$

★ 重点记忆：稳定性校核

$$n_{st} = \frac{F_{cr}}{F} \geq [n_{st}]$$

n_{st} 稳定安全系数。

F 实际压力。

$[n_{st}]$ 许用稳定安全系数（工程常取 2~4）。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：取最小 I ：稳定由“最弱弯曲平面”控制。
- ★ 重点记忆：先判端部 μ 再套公式：端部条件错一个，结果直接翻倍/四倍。
- ★ 重点记忆：欧拉公式适用范围：细长杆（ $\lambda > \lambda_p$ ），否则用经验公式。
- ★ 重点记忆：强度 稳定：压杆必须同时满足强度条件和稳定条件。

第 11 部分 最后一页：考前”做题顺序建议”（防崩）

【解题算法：卷面策略：先稳拿分，再冲难题】

1. 先做：内力图/单公式应力（拉压、弯曲、扭转）——最稳；
2. 再做：强度理论（弯扭组合、主应力）——把题统一成 σ_r ；
3. 最后做：挠度/静不定/综合应力——步骤多，别早卡住。

【易错避坑/考试陷阱】

- ★ 重点记忆：挠度题底线检查：边界条件（简支 $w = 0$ ，固支 $\theta = 0$ ）+ 连接处 w, θ 连续。
- ★ 重点记忆：强度题底线检查：危险截面先看 $|M|_{\max}$ ；圆/矩形/空心的 W 别用错。
- ★ 重点记忆：稳定题底线检查：先判 μ ，再取最小 I 。
- ★ 重点记忆：单位统一：全部换算到同一单位系统（建议 N、mm、MPa）。
- ★ 重点记忆：符号约定：开始就定好正负号规则，全篇贯彻。

★ 重点记忆：按题型快速索引（考前 3 分钟用）

- 轴向拉压（第 6 章）： $\sigma = N/A$ ， $\Delta l = \int N/(EA) dx$ ，静不定写兼容。
- 扭转（第 7 章）： $\tau_{\max} = T/W_p$ ， $\varphi = TL/(GI_p)$ 。
- 梁内力（第 8 章）： $dV/dx = -q$ ， $dM/dx = V$ ，先画图再谈强度/挠度。
- 弯曲强度（第 9 章）： $\sigma_{\max} = M_{\max}/W_z$ ，必要时加 $\tau = VQ/(Ib)$ 。
- 挠度（第 10 章，最重点）： $EIw'' = M$ ；边界条件（简支 $w = 0$ ，固端 $w = \theta = 0$ ）；静不定用兼容条件。
- 应力状态（第 11 章）：斜截面公式、主应力；为第 12 章强度理论服务。
- 强度理论（第 12 章）：弯扭组合用第三/四理论； $\sigma_r \leq [\sigma]$ 。
- 压杆稳定（第 13 章）： $F_{cr} = \pi^2 EI/(\mu L)^2$ ；先定 μ ，取最小 I 。